Le calcul posé à l'école élémentaire

Cette fiche d'accompagnement a pour objet de préciser la place et les objectifs de l'apprentissage des algorithmes de calcul posé (souvent désignés par l'expression « techniques opératoires »).
Pour les considérations générales relatives aux enjeux de l'enseignement du calcul à l'école primaire, on peut se reporter à l'introduction du document d'application (paragraphe « La question du calcul aujourd'hui »). La place respective des différents moyens de calcul y est précisée : calcul mental, calcul instrumenté et calcul posé.
Pour les apprentissages à développer aux cours des différents cycles, les informations sont apportées dans les parties suivantes du texte des programmes et du document d'application.
Ces différents textes insistent sur le fait qu'aujourd'hui l'apprentissage des techniques de calcul posé ne se justifie plus par leur utilisation effective dans la société, mais doit être centré sur deux objectifs essentiels :
– une maîtrise de ces techniques, dans des cas simples, permet aux individus de mieux apprécier l'efficacité des instruments qu'ils utilisent ;
– un travail visant à la construction, à l'analyse et à l'appropriation de ces techniques conduit à utiliser et combiner de nombreuses propriétés relatives au système d'écriture des nombres (numération décimale de position) et aux opérations en jeu ; en retour, ce travail assure une meilleure maîtrise de ces propriétés.
En résumé, l'étude des techniques de calcul posé doit être résolument orientée vers la compréhension et la justification de leur fonctionnement. Elle ne peut donc, en aucun cas, se limiter à l'apprentissage de récitatifs.
Généralement, les calculs sont proposés en ligne, le choix de les effectuer en ligne ou posés « en étages » revenant à l'élève.
Enfin, dans tous les cas, l'élève doit être incité et entraîné à utiliser des moyens de contrôle des résultats obtenus (comme dans le cas du calcul instrumenté) : recherche d'un ordre de grandeur du résultat, contrôle du chiffre des unités, vérification par une addition dans le cas de la soustraction ou par celle de l'égalité $a = bq + r$ dans le cas de la division.
Dans ce document, les techniques relatives à chaque opération sont examinées. Les acquis préalables nécessaires à leur étude sont précisés et quelques étapes pour leur enseignement sont proposées.

	Programme : objectifs et contenus	**Programme : compétences**	**Document d'application**
Cycle des apprentissages fondamentaux	Calcul (§ 3). Calcul (§ 4).	Calcul automatisé (§ 3.1).	Introduction : la question du calcul aujourd'hui (p. 6). Résultats mémorisés, procédures automatisées (p. 21) : commentaire relatif aux compétences attendues.
Cycle des approfondissements		Résultats mémorisés, procédures automatisées (§ 4.1).	Introduction : la question du calcul aujourd'hui (p. 6). Résultats mémorisés, procédures automatisées (p. 25) : commentaire relatif aux compétences attendues.

Addition posée

La technique de l'addition est la plus simple à mettre en place. Sa compréhension repose en effet sur celle du principe fondamental de la numération décimale (égalité entre dix unités et une dizaine…) et la rapidité de son exécution dépend de la connaissance des sommes de nombres à un chiffre (tables d'addition).
Cependant, à l'entrée au CE2 (résultats de l'évaluation 2002), elle n'est maîtrisée que par trois élèves sur quatre dans le cas d'une addition de deux nombres avec retenues (calcul de 346 + 184, proposé en colonnes) et par à peine plus de la moitié des élèves dans le cas où l'addition comporte trois nombres (calcul de 238 + 159 + 374, proposé en colonnes).

À l'entrée en sixième, dans le cas où des nombres décimaux sont en jeu, près d'un élève sur cinq est encore en difficulté face à des additions comme 8,32 + 15,87 ou 15,672 + 352,21 (données en ligne). Les erreurs relevées ont trois origines possibles : maîtrise insuffisante des tables, mauvaise gestion des retenues, disposition « en étages » ne respectant pas l'alignement des chiffres de même valeur. Cette dernière difficulté apparaît plus fréquemment dans le cas des nombres décimaux, ce qui témoigne d'une compréhension insuffisante des écritures à virgule.

Addition des nombres entiers

Le calcul posé en colonnes n'a d'intérêt que pour les nombres d'au moins deux chiffres et même dans ce cas, le calcul à partir de l'écriture en ligne en repérant le rang de chaque chiffre est aussi efficace et rapide que le calcul posé « en étages ».
Il est important de ne pas dissocier dans le temps l'étude des cas « sans retenue » et des cas « avec retenue », afin de ne pas générer l'idée que le calcul se limite à l'addition séparée des chiffres de même valeur.
Deux acquisitions doivent précéder cet apprentissage :
– la compréhension du principe de groupements par dix qui sous-tend la numération décimale de position, et notamment l'égalité entre dix unités et une dizaine ;
– une efficacité dans le calcul des sommes de deux nombres inférieurs à dix : il ne s'agit pas d'attendre que tous les résultats des tables soient disponibles instantanément, mais il est indispensable qu'ils puissent être produits assez rapidement pour ne pas entraver la réflexion sur la gestion des retenues.
De plus, pour le calcul de sommes de plusieurs nombres, les élèves doivent être capables de calculer rapidement des sommes dont un des termes est un nombre à deux ou trois chiffres et l'autre un nombre à un chiffre.
En fonction de ces considérations, le travail sur la technique posée ne peut pas intervenir prématurément. Il se situe plutôt en dernière année de cycle 2, même si une première approche peut en être faite en fin de cours préparatoire.
Le recours à un ou plusieurs « matériels de numération » permet d'illustrer utilement la technique, et donc de mieux la comprendre, notamment par la correspondance établie entre retenues et groupements pas dizaines, centaines…
Il est important de proposer également des additions de plus de deux nombres que les élèves doivent calculer en une seule fois.

Addition des nombres décimaux

Dès qu'une première compréhension de l'écriture à virgule des nombres décimaux est en place, le travail sur la technique posée de l'addition de deux ou plusieurs nombres décimaux peut être envisagé. Axé sur la justification de la technique, il est d'ailleurs de nature à renforcer la maîtrise de la valeur attribuée à chaque chiffre en fonction de sa position dans l'écriture décimale et de celle des égalités du type 10 centièmes, c'est 1 dixième ou 10 dixièmes, c'est 1 unité… Ainsi, le calcul de 37,4 + 6,85 nécessite d'abord de comprendre que le premier nombre ne comporte pas de chiffre des centièmes, puis que l'addition de 4 dixièmes et de 8 dixièmes donne 12 dixièmes : 10 dixièmes formant une unité (en retenue), il y a donc 2 comme chiffre des dixièmes dans le résultat. Le tableau de numération peut constituer un référent utile, à condition que son utilisation ne devienne pas systématique. Les élèves doivent prendre conscience du fait que cette technique est identique à celle utilisée pour les entiers, à condition de placer correctement les nombres à ajouter les uns par rapport aux autres (dans le calcul « en étages »).

Soustraction posée

L'apprentissage d'une technique usuelle de soustraction est plus difficile que celui de l'addition pour plusieurs raisons :
– il existe plusieurs techniques possibles dont les fondements ne reposent pas sur les mêmes principes ni, par conséquent, sur les mêmes connaissances ;
– les connaissances qui permettent de justifier ces techniques sont plus nombreuses et plus complexes que dans le cas de l'addition ;
– les différences ou les compléments élémentaires (relevant des tables) sont souvent moins disponibles que les sommes ;
– une difficulté supplémentaire apparaît dans le cas des nombres décimaux lorsque la partie décimale du premier terme comporte moins de chiffres que celle du second.
Ces différentes raisons justifient amplement que les programmes n'envisagent l'apprentissage systématique d'une technique dans le cas des nombres entiers qu'au cycle 3. Ceci n'implique pas, bien au contraire, que la soustraction ne soit pas étudiée dès le cycle 2 : elle est alors travaillée dans le cadre de la résolution de problèmes et dans celui du calcul mental (mémorisation de résultats, calcul réfléchi).
À l'entrée en sixième (résultats de l'évaluation 2001), le calcul d'une soustraction posée fait difficulté pour environ un élève sur cinq (1 285 – 625 et 937 – 46, données en ligne). L'erreur la plus fréquente reste celle qui consiste à soustraire pour chaque chiffre « le plus petit du plus grand ». Les taux de réussite sont assez voisins pour des soustractions avec des décimaux ayant des parties décimales de même longueur (19,78 – 2,42 et 20,14 – 8,82, données en ligne, la première étant évidemment mieux réussie que la seconde). Les échecs augmentent dans le cas des décimaux dont les parties décimales ne sont pas de même longueur : quatre élèves sur dix sont en

difficulté dans le calcul de 7,24 – 4,3 (donnée en ligne, la pose étant demandée explicitement).

Trois techniques pratiquées

Le choix de l’une de ces techniques par l’enseignant suppose une conscience claire des justifications qui sous-tendent chacune d’elles de façon à adapter les étapes de l’apprentissage. Le calcul s’effectue toujours de droite à gauche. Les trois techniques sont expliquées sur l’exemple : 753 – 85.

Technique reposant sur une autre écriture du premier terme

De 3 unités, on ne peut pas soustraire 5 unités.
On échange donc 1 dizaine contre 10 unités. On considère maintenant 4 dizaines et 13 unités. On peut alors soustraire 5 unités de 13 unités ; résultat : 8 unités.
Le même processus est repris pour soustraire 8 dizaines…

	6	14	
	~~7~~	~~5~~	13
–		8	5
	6	6	8

Cette technique est la plus simple à comprendre, car elle est fondée sur la seule connaissance des principes de la numération décimale, élaborée dès le CP. Elle est en vigueur dans certains pays, mais présente l’inconvénient de nombreuses surcharges pour des calculs du type 4 003 – 1 897.

Technique reposant l’équivalence entre soustraction et recherche de complément

Le calcul de 753 – 85 = … est équivalent à celui de 85 + … = 753.
C’est donc le calcul de cette addition lacunaire qui va être réalisé.
Le seul nombre à un chiffre qui, ajouté à 5, donne un résultat terminé par 3 est 8 (table d’addition) : 5 + 8 = 13. On retrouve le « 3 » des unités et il faut écrire « 1 » comme retenue au rang des dizaines.
L’addition lacunaire se poursuit au rang des dizaines : que faut-il ajouter à 9 (8 + 1) pour obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 5 ? Réponse : 6, car 9 + 6 = 15, avec retenue de « 1 » au rang des centaines…

	7	5	3	
–		8	5	
	1	1		+
	6	6	8	

Cette technique présente l’avantage de n’être qu’une adaptation d’une technique connue (celle de l’addition), mais elle nécessite la compréhension de l’équivalence entre soustraction et recherche de complément qui reste encore difficile au début du cycle 3 pour certains élèves.

Technique reposant sur l’invariance d’une différence par ajout simultané d’un même nombre aux deux termes de la soustraction

De 3 unités, on ne peut pas soustraire 5 unités.
On choisit d’ajouter 10 unités au premier terme et de considérer 13 unités. Pour ne pas changer la différence, il faut aussi ajouter 10 unités au deuxième nombre : on le fait sous la forme d’1 dizaine. Etc.
À signaler : il y a ajout simultané des 10 unités et de la dizaine (puis de 10 dizaines et d’une centaine). On ne peut donc pas parler de retenue.

	7	15	13
–		8	5
	1	1	
	6	6	8

Cette technique fait également appel aux équivalences liées à la numération décimale, entre 10 unités et 1 dizaine, etc. Elle semble être la plus utilisée en France. Pourtant, il s’agit la plus difficile, parce qu’elle repose sur une propriété que les élèves maîtrisent tardivement et qui peut être formalisée par : $a - b = (a + c) - (b + c)$; cette formalisation n’est évidemment pas à proposer aux élèves.

Soustraction des nombres entiers

Le choix de l’une des techniques conditionne les étapes de l’apprentissage, dans la mesure où les connaissances et les compétences préalables que doivent maîtriser les élèves varient d’une technique à l’autre. Les seules connaissances communes concernent les équivalences entre unités, dizaines, centaines… et une maîtrise suffisante des résultats des tables d’addition (compléments et différences).
Comme pour l’addition, il est important de ne pas dissocier dans le temps l’étude des cas « sans retenue » des cas « avec retenue », afin de ne pas générer l’idée qu’un traitement séparé des chiffres de même valeur suffit toujours.
Le choix d’une technique relève de l’équipe du cycle 3. Il est cependant possible que les élèves arrivent d’autres écoles avec des techniques différentes. Il importe alors de respecter ces techniques, de montrer qu’elles permettent d’obtenir le même résultat, voire de les exploiter en classe pour chercher à expliciter les propriétés sous-jacentes.
Si le choix se porte sur la première technique, la mise en place peut commencer plus tôt que pour les deux autres techniques qui nécessitent un travail préparatoire plus important et plus difficile.
Le recours à un ou plusieurs « matériels de numération » permet utilement d’illustrer la technique, et donc de mieux la comprendre, mais la réflexion sur les nombres et sur les propriétés mobilisées doit rester la préoccupation dominante.

N.B. – Au cycle 3, il est important de proposer en ligne des soustractions de plus de deux nombres, par exemple 125 – 17 – 25 – 56. Ce calcul ne peut se conclure en une seule étape (même « en étages ») et génère plusieurs procédures :
– soit trois calculs successifs de différences, ce qui s'écrit en mathématiques [(125 – 17) – 25] – 56 ;
– soit deux calculs seulement : une somme suivie d'une différence, ce qui s'écrit en mathématiques 125 – (17 + 25 + 56).
L'équivalence des deux procédures (et l'égalité des deux écritures) n'est pas immédiate et demande à être pointée, en sachant que la justification peut présenter des difficultés pour certains élèves.

Soustraction des nombres décimaux

Comme dans le cas de l'addition, le travail sur la technique posée de la soustraction de deux nombres décimaux peut être envisagé dès qu'une première compréhension de l'écriture à virgule des nombres décimaux est en place, travail toujours axé sur la justification de la technique. Une difficulté particulière apparaît pour le calcul de différences comme 703,2 – 87,56 : elle se traduit souvent par le fait que des élèves écrivent « 6 » au rang des centièmes dans le résultat. Pour conduire correctement le calcul, il est nécessaire de considérer que l'absence de chiffre des centièmes dans 703,2 peut aussi être traduite par la « présence » de 0 à partir de l'égalité 703,2 = 703,20. Le but visé est d'amener les élèves à prendre conscience que la soustraction des décimaux fonctionne comme celle des entiers, moyennant un alignement (en colonne) des chiffres des unités ; le tableau de numération peut constituer un référent utile, à condition qu'il ne devienne progressivement qu'évoqué.

Multiplication posée

De nombreuses techniques de calcul de produits ont été élaborées au cours des temps et, aujourd'hui encore, les techniques utilisées ne sont pas toujours identiques d'un pays à l'autre. L'étude de certaines d'entre elles peut d'ailleurs être conduite avec une visée culturelle et comme support à un travail sur les propriétés de la multiplication. Mais, seule la technique usuelle française doit être maîtrisée (et bien entendu comprise) par les élèves.
Actuellement, à l'entrée en sixième, les résultats sont très variables. En 2001, le calcul de 64 × 39 n'est réussi que par 54 % des élèves. En 2000, ceux de 45 × 19 et de 523 × 205 sont réussis par respectivement 67 % et 60 % des élèves. Et, contrairement à une idée répandue, l'analyse des réponses montre que les erreurs dues à une connaissance insuffisante des tables de multiplication sont nettement plus nombreuses que celles qui peuvent être attribuées à la maîtrise de la technique. Ce constat plaide une nouvelle fois pour un renforcement du travail dans le domaine du calcul mental.

Multiplication des nombres entiers

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances :
– tables de multiplication ;
– numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
– règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300… ;
– distributivité de la multiplication sur l'addition.
Certaines de ces connaissances commencent à être travaillées au cycle 2, mais la maîtrise nécessaire à la compréhension de la technique de la multiplication posée ne commence à être assurée qu'au cours de la première année du cycle 3.
Le cas de la technique de multiplication de nombres à deux ou trois chiffres… par un nombre à un chiffre est plus simple et sa maîtrise constitue un préalable à celle de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Elle repose sur les principes de la numération décimale et la connaissance des produits des nombres à un chiffre (les tables de multiplication) ainsi que sur la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (27 × 6 = 7 × 6 + 20 × 6). Au cours d'une première étape, certains élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit de ces tables pour alléger la charge de travail. Cette technique peut être mise en relation avec le calcul de l'addition itérée (posée) d'un même nombre.
Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou la deuxième année du cycle 3.
Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer, comme dans l'exemple ci-dessous :

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & 5 & 2 & 3 & \\
 & & \times & 2 & 0 & 5 & \\
\hline
 & & 2 & 6 & 1 & 5 & \leftarrow 523 \times 5 \\
1 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & \leftarrow 523 \times 200 \\
\hline
1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 5 &
\end{array}
$$

Multiplication d'un décimal par un entier

Une explication possible de la technique tient au fait que, par exemple, le résultat de 157,23 × 45 peut être obtenu en calculant d'abord 15 723 × 45, puis en divisant le résultat par 100, car 157,23 c'est 15 723 divisé par 100. Le travail sur cette technique suppose donc une bonne compréhension des nombres décimaux (valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture à virgule), ainsi que celle de la multiplication et de la division par 10, 100…, dont on sait qu'elle est source de difficultés pour de nombreux élèves.
La mise en place de cette technique relève donc de la fin de cycle 3.

Division posée

Comme pour la multiplication, de nombreuses techniques ont été utilisées dans l'histoire et le sont encore, selon les pays. La technique usuelle française, telle qu'elle a été longtemps enseignée, est très dépouillée (pas de soustractions posées) et donc source de nombreuses erreurs. De plus, celles-ci sont difficiles à repérer puisque tous les calculs effectués n'ont pas donné lieu à une trace écrite. Par ailleurs, il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient en cours de calcul, alors que, pour les autres opérations, elle intervient soit au début, soit à la fin comme instrument de prévision ou de contrôle.
Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique… et en tirer la conséquence : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.
Il n'est alors pas étonnant que, à l'entrée en sixième, les résultats constatés soient l'objet d'une grande variabilité. Ainsi, en 1999, le calcul posé de la division de 72 par 3 est réussi par 75 % des élèves alors que celui de 2 782 par 26 ne l'est que par 44 % d'entre eux.

Division euclidienne de deux nombres entiers

Cette technique est la seule dont la connaissance est demandée à la fin de l'école primaire. Sa compréhension suppose de nombreuses connaissances préalables :
– maîtrise des deux « sens » de la division : « quelle est la valeur de chaque part ? » (diviser 2 782 par 26, revient à partager 2 782 en 26 parts égales et chercher la valeur d'une part), « combien de fois ? » (diviser 2 782 par 26, revient à chercher combien de fois 26 est contenu dans 2 782) ;
– maîtrise des tables de multiplication (ce qui englobe la recherche de « combien de fois 7 dans 59 ? », qui n'est pas directement dans la table de multiplication par 7) – voir, à ce sujet, le chapitre sur le calcul mental, page 32 ;
– capacité à prévoir le nombre de chiffres du quotient, par encadrement ou par partage d'une partie du dividende.
À partir de là, plusieurs étapes peuvent être envisagées.
Un temps préalable suffisant doit être consacré au calcul réfléchi de quotients et de restes. En effet, ce type de calcul donne l'occasion aux élèves de mettre en œuvre, en acte, des compétences également sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire.
Ainsi, diviser mentalement 1 548 par 7 incite à décomposer 1 538 en 1 400 + 148, après avoir repéré que 1 400 est divisible par 7 (résultat : 200), puis 148 en 140 + 8 pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1). Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : 200 + 20 + 1 = 221.
La seconde étape vers la technique peut consister à effectuer des divisions par un nombre à un chiffre, avant de travailler sur des divisions plus complexes, tout en limitant le niveau de difficulté.
Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :
– commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient (ce qui permet un premier moyen de contrôle sur le quotient) ;
– s'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée) ;
– encourager la pose effective des soustractions (sans interdire toutefois aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).
L'exemple suivant montre ce qui peut être attendu en fin d'école primaire :

	7	8	0	5	2	7	
–	5	4			2	8	9
	2	4	0		c	d	u
–	2	1	6				
		2	4	5			
	–	2	4	3			
				2			

	2	7			2	7
×		9		×		8
2	4	3		2	1	6

La technique « dépouillée » de la division n'est pas une compétence visée, ni à l'école primaire, ni au collège.